Variáveis complexas **Solução lista 01**
O plano complexo

tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira
Dep. de Matemática
Univ. Estadual Vale do Acaraú

25 de outubro de 2007

Documento escrito com LaTeX - sis. op. Debian/Gnu/Linux

Exercícios 1 *O plano complexo* <u>*objetivo:*</u> *Conduzí-l@ a dominar as operações elementares com números e funções definidas em* **C**. *Parte significativa deste trabalho é* a representação gráfica dos números complexos, *sendo bem feita @ conduzirá a uma intuição significativa sobre estes números.*

A lista está estruturada como um tutorial, cada questão contribui para uma compreensão da que vem depois.

As questões discursivas tem o objetivo conduzí-l@ a ser um@ autor@ de textos matemáticos. Escreva livremente.

Eu vou usar apoio computacional e vou incluir os programas utilizados dentro do texto. Além disto você encontra os programas em [8] de onde você baixá-los e portanto completar a sua cultura em programação lendo os programas, rodando-os, e voltando a lê-los. Tudo que for utilizado é domínio público que pode ser obtido na Internet gratuitamente.

<u>**palavras chave:**</u>*representação geométrica dos complexos, forma polar, conjugado, inverso, funções polinômiais, gnuplot, python.*

1. <u>*produto*</u>

Solução 1 *(a) Vou logo fazer a segunda parte da questão, porque ela conduz a uma fórmula. Tendo a fórmula eu posso escrever um programa em alguma linguagem de programação e automatizar as contas, o que vou fazer em seguida.*

Calcule o produto dos números complexos

$$z = \alpha + i\beta \ ; \ w = \gamma + i\delta \tag{1}$$

e escreva a fórmula do produto mostrando como obter a parte real e a parte imaginária.

$$\begin{aligned} zw = (\alpha + i\beta)(\gamma + i\delta) = & \quad (2)\\ = \alpha\gamma + i\alpha\delta + i\beta\gamma + \beta\delta i^2 = & \quad (3)\\ = \alpha\gamma + i\alpha\delta + i\beta\gamma + \beta\delta(-1) = & \quad (4)\\ = (\alpha\gamma - \beta\delta) + i(\alpha\delta + \beta\gamma) & \quad (5)\end{aligned}$$

Podemos usar esta fórmula para automatizar as contas.

(b) Automatizando agora as contas:

A linguagem de programação `python` *tem alguma semelhança sintática com* `Pascal` *e é livremente distribuida. Você pode ignorar esta parte*

da resposta (a parte de programação), ou fazer algum esforço para entender o programa.

Pode simplesmente rodar o programa baixando o compilador do `python`*, [6] e rodar o programa com*

`python complexos.py`

Você encontra este programa em [8, complexos.py].

```
#! /usr/bin/python
# -*- coding: utf8 -*-

from sys import *

def produto(a,b,c,d):
  return (a*c-b*d,a*d+b*c)


a1=input('A parte real  a1 = ? ')
b1=input('A parte imaginária b1 = 1 ? ')

print '----------------------------------\n'

a2=input('A parte real  a2 = ? ')
b2=input('A parte imaginária b2 =  ? ')

a3=0; b3=0;

(a3,b3) = produto(a1,b1,a2,b2)

if (b1 < 0):
  resposta = '('+str(a1)+' '+str(b1)+' i)'
else:
  resposta = '('+str(a1)+' + '+str(b1)+' i)'
if (b2 < 0):
  resposta = resposta +'('+str(a2)+' '+str(b2)+' i)'
else:
  resposta = resposta +'('+str(a2)+' +'+str(b2)+' i)'
if (b3 < 0):
  resposta = resposta + ' = ('+str(a3)+'  '+ str(b3)+'i)  \n'
else:
  resposta = resposta + ' = ('+str(a3)+' + '+ str(b3)+'i)  \n'
stdout.write(resposta)
```

Algumas das multiplicações com este programa:

`complexos.py`

```
A parte real  a1 = ? 2
A parte imaginária b1 = 1 ? 3

A parte real  a2 = ? 2
A parte imaginária b2 =  ? -3
(2 + 3 i)(2 -3 i) = (13 + 0i)
==================================
A parte real  a1 = ? 0
A parte imaginária b1 = 1 ? 1

A parte real  a2 = ? 2
A parte imaginária b2 =  ? 3
(0 + 1 i)(2 +3 i) = (-3 + 2i)
==================================
A parte real  a1 = ? 0
A parte imaginária b1 = 1 ? 1

A parte real  a2 = ? 0
A parte imaginária b2 =  ? -1
(0 + 1 i)(0 -1 i) = (1 + 0i)
=================================
```

2. *representação geométrica*

   (a) *Represente geométricamente os números complexos*

$$\begin{array}{cccc} i & -i & 1+i & 1-i \\ 2+3i & 2-3i & -2+3i & -2-3i \end{array} \tag{6}$$

   (b) *Desenhe o círculo unitário e marque a projeção de cada um dos números complexos acima no círculo unitário. Cálcule o arco determinado por cada um destes números e o seu módulo.*

Solução 2 *Vou usar* `gnuplot` *e o comando*

```
set arrow from a,b rto c,d
```

aplicado em cada um dos números complexos acima. Este comando do `gnuplot` *traça um segmento de reta entre os dois pontos indicados, desde "from" até "rto". Ele possui diversas etiquetas, uma delas* head *que produz a ponta da flecha. Você encontra este programa em [8].*

Para conseguir o círculo unitário, eu vou usar duas funções,

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2}\ ;\ f_2(x) = -\sqrt{1-x^2} \tag{7}$$

Porém estas funções não estão definidas para $|x|$ maior do que 1. `gnuplot` *não se incomodaria com isto mas o gráfico ficaria restrito ao intervalo*

$[-1,1]$ e como temos números complexos que fogem deste domínio restrito, então, em cada caso eu vou extender as funções com zero fora do intervalo $[-1,1]$. A re-definição da equação (7) fica assim, em Matemática,

$$f_1(x) = \begin{cases} \text{se } x \le -1 & 0 \\ \text{ou então se } x \in (-1,1) & \sqrt{1-x^2} \\ \text{ou então se } x \ge 1 & 0 \end{cases} \tag{8}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \text{se } x \le -1 & 0 \\ \text{ou então se } x \in (-1,1) & -\sqrt{1-x^2} \\ \text{ou então se } x \ge 1 & 0 \end{cases} \tag{9}$$

Esta é uma estrutura lógica do tipo `if() else` *que pode ser implementada em* `gnuplot` *usando a estrutura de controle de fluxo*

```
condicao ?  equacao1 :  equacao2
```

$$f_1(x) = (x <= -1)?0 : (x < 1)?\sqrt{1 - x**2} : 0 \tag{10}$$

$$f_2(x) = (x <= -1)?0 : (x < 1)? - \sqrt{1 - x**2} : 0 \tag{11}$$

O resultado é o script do `gnuplot`

```
set xrange [-4:4]
set yrange [-4:4]
set arrow from  0,0 rto 0,1
set arrow from  0,0 rto 0,-1
set arrow from  0,0 rto 1,1
set arrow from  0,0 rto 1,-1
set arrow from  0,0 rto 2,3
set arrow from  0,0 rto 2,-3
set arrow from  0,0 rto -2,3
set arrow from  0,0 rto -2,-3
f1(x) =  (x<=-1)?0:(x<1)? sqrt(1 - x**2):0
f2(x) =  (x<=-1)?0:(x<1)? -sqrt(1 - x**2):0
set terminal postscript portrait enhanced color
set output 'exer01_01_01.eps'
plot 0, f1(x), f2(x)
print 'Aperte enter para finalizar'
pause -2
```

e você pode ver na figura (1) página 5, o gráfico feito por `gnuplot` *seguindo o script acima.*

3. *notação de Euler*

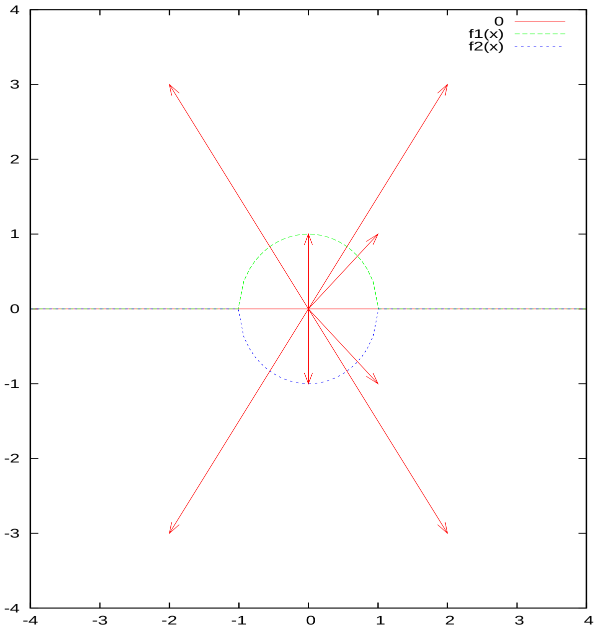

Figura 1: Números complexos e o círculo unitário

4. <u>*notação de Euler*</u>

Solução 3 *Vou incluir parte da solução da próxima questão aqui, o programa* `xfig` *que pode ser obtido livremente na internet nos permite fazer gráficos "manualmente"*

A notação de Euler[1] *esta sendo usada aqui como uma etiqueta para cada um dos números complexos*

$$cos(\alpha) + isen(\alpha) = e^{i\alpha}$$

Na figura (2) página 6, você pode ver o círculo unitário divido em oito

[1]Usualmente chamada *fórmula de Euler* que pode ser demonstrada usando a fórmula de Taylor das funções *sen(), cos()*

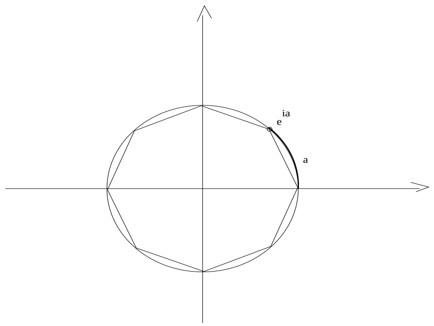

Figura 2: Círculo unitário dividido em oito partes iguais

setores iguais por um octógono, polígono regular convexo de oito lados. Cada um dos vértices corresponde a um dos valores da sucessão aritmética cuja razão é $\frac{\pi}{4}$.

Podemos agora definir a adição por cogruência nesta progressão aritmética de oito termos, a congruência módulo 2π*, isto, sempre a soma ultrapassar este valor, consideramos o resto na "divisão inteira" por* 2π*. Definida*[2] *assim esta adição, temos um grupo aditivo comutativo no conjunto* G.

Considere $\mathbf{S}^1$*, o círculo unitário de centro na origem como sendo o conjunto de todos os números complexos unitários. Desenhe* $\mathbf{S}^1$ *e observe que a* notação, forma polar,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \tag{12}$$

identifica qualquer ponto em $\mathbf{S}^1$ *usando como referência a "origem"* $(1, 0)$ *e o arco* θ*. Marque os números*

$$e^{i\alpha} \ ; \ \alpha \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{-\pi}{4}, \frac{-\pi}{2}, \frac{-3\pi}{4}\} \tag{13}$$

Esta identificação é uma função bijetiva

$$\phi(t) = cos(t) + isen(t) = e^{it}$$

entre os elementos da progressão aritmética *e os pontos sobre* $\mathbf{S}^1$*. Basta-nos agora provar que*

[2]Evidentemente que está mal definida, a presença de aspas indicam que o autor confessa o crime, mas alguma coisa tem que ficar para que o leitor complete, a verdade mesmo é que dá trabalho para escrever corretamente este parágrafo...

$$\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)\ ;\ \phi(0) = 1 \tag{14}$$

para que a função ϕ seja um isomorfismo de grupos*, entre o grupo aditivo G, a progressão artimética, e o grupo multiplicativo formado pelas imagens e^{it} em $\mathbf{S}^1$.*

Quem prova isto é uma fórmula da trigonometria que vamos admitir.

Se multiplicarmos

$$\phi(s)\phi(t) = \tag{15}$$
$$e^{is}e^{it} = (cos(s) + isen(s))(cos(t) + isen(t)) = \tag{16}$$
$$(cos(s)cos(t) - sen(s)sen(t)) + i(cos(s)sen(t) + sen(s)cos(t)) = \tag{17}$$
$$cos(s+t) + isen(s+t) = e^{i(s+t)} = \phi(s+t) \tag{18}$$
$$\phi(0) = 1 \tag{19}$$

a última equação acima diz "o número complexo, cujo argumento é zero, é o número 1".

5. *<u>notação de Euler</u> Considere um número complexo, z, no plano. Ele determina um círculo com centro na origem.*

Solução 4 *(a) Trace o círculo e também $\mathbf{S}^1$. Verifique que a projeção de z sobre $\mathbf{S}^1$ determina um ângulo γ e que portanto*

$$z = \rho e^{i\gamma} \tag{20}$$

Cada número complexo, $\underline{z}$, determinando um ponto do plano, estará ou na parte exterior do círculo unitário ou em seu interior.

Se estiver no interior podemos prolongar o segmento de reta que representa $\underline{z}$ para cortar a curva do círculo. Se estiver no exterior o segmento de reta que o representa já corta a curva do círculo. Se estiver na curva do círculo também neste caso determina um arco de círculo que vai desde a origem

$$1 = 1 + 0i$$

até este ponto de encontro da reta que contém o número complexo, $\underline{z}$.

O arco que o número complexo, $\underline{z}$ desta forma determina sobre $\mathbf{S}^1$ de forma única, se chama de argumento *de $\underline{z}$.*

Como $\underline{z}$ também determina um triângulo retângulo então podemos calcular o ângulo, (o argumento) por exemplo com

$$arg(z) = atan(\frac{y}{x})$$

supondo que $\underline{z = x + iy}$. Esta expressão não tem sentido quando considerarmos um ponto sobre o eixo OY mas podemos extendê-la, para este caso, afirmando que quando tivermos $z \in i\mathbf{R}$, for um número complexo imaginario puro*, o argumento será*

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}.$$

No primeiro caso quando z for um múltipo de i, e no outro caso quando z for um múltiplo de -i. Em ambos caso a parte real, x é zero, o que nos impediria de cálcular usando o atan.

Aqui gosto de fazer comparações mostrando as "definições" que nós matemáticos, somos forçados a fazer afim que a teoria fique bem arrumada, um exemplo de situação semelhante, é a definição de 0! que completa a definição que fala de um produto de números num caso em que não há nenhum número para multiplicar... O "0!" diz respeito a um conjunto vazio de fatores e se relaciona com os "arranjos" zero-a-zero de um conjunto de n elementos. Embora isto possa parecer absurdo, é extremamente necessário e prático. Acima estamos extendendo a definição de uma função para falar do argumento dos números complexos que têm a parte real nula.

Na figura (3) página 8, você pode ver os números complexos

$$ci \text{ cujo argumento é } \frac{\pi}{2} di \text{ cujo argumento é } \frac{3\pi}{2} \equiv \frac{-\pi}{2}$$

observe que a equivalência mencionada acima diz respeito a congruência a que já fizemos referência anteriormente.

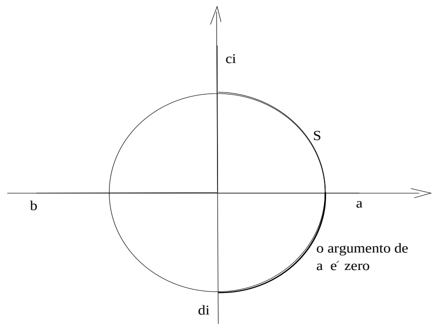

Figura 3: O argumento de um número real é zero ou π

(b) Escreva as fórmulas. *Explicite ρ e γ.*

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \ ; \gamma = atan(\frac{y}{x}) \tag{21}$$

e quando $x = 0$ o valor de γ será $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{-\pi}{2}$ conforme o número complexo $z = x + iy$ seja um múltiplo positivo[3] *de i ou de $-i$.*

(c) *Justifique porque o par (ρ, γ) se chama "coordenadas polares de z". Encontre as* coordenadas polares *dos números complexos Estas são as coordenadas polares usadas em Cálculo.*

$$\begin{array}{cccc} i & -i & 1+i & 1-i \\ 2+3i & 2-3i & -2+3i & -2-3i \end{array} \tag{22}$$

(d) *Faça uma pequena redação explicando como funciona a* forma polar, *como, dados (ρ, θ) podemos encontrar o ponto P no plano e vice-versa, como dado um ponto $P = (x, y)$ podemos encontrar suas coordenadas polares.*

Espero que alguém me envie uma redação da qual eu aceite ser co-autor para colocar aqui.

6. Vértices do polígono de 8 lados

(a) *Verifique que os pontos $e^{i\alpha}$ na equação (20) determinam um polígono regular convexo de 8 lados inscrito no círculo $\mathbf{S}^1$.*

Solução 5 *Porque são os pontos determinados por uma progressão artimética, em que a razão é o arco de círculo α, então determina uma malha uniforme sobre $\mathbf{S}^1$ que são os vértices de um poligono regular. O políono é convexo porque seus vértices se encontram sobre $\mathbf{S}^1$.*

(b) representação geométrica *Verifique que os números complexos identificados pela equação (20), formam um grupo multiplicativo. Faça a tabela de multiplicação usando a* notação de Euler. *Mostre que existe um isomorfismo de grupos com o grupo aditivo*

$$G = \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{-\pi}{4}, \frac{-\pi}{2}, \frac{-3\pi}{4}\} = \mathbf{R}/2\pi \tag{23}$$

em que a adição é feita módulo-2π. *Faça a tabela de adição do grupo $(G, +)$.*

Solução 6 *Feita acima com o isomorfismo de grupos.*

7. Polígono de 5 lados *Encontre um polígono de 5 lados inscrito em $\mathbf{S}^1$, que determine um grupo multiplicativo de números complexos. Exiba o grupo aditivo que lhe é isomorfo.*

[3] Fica para o leitor definir melhor o que significa múltiplo positivo....

8. Polígono de 9 lados *Encontre um polígono de 9 lados inscrito em $\mathbf{S}^1$, que determine um grupo multiplicativo de números complexos. Exiba o grupo aditivo que lhe é isomorfo.*

9. Polígono de n lados *Descreva os vértices de um polígono de n lados inscrito em $\mathbf{S}^1$, que determine um grupo multiplicativo de números complexos. Exiba o grupo aditivo que lhe é isomorfo.*

10. Raízes da unidade *Verifique que em todos os polígonos inscritos em $\mathbf{S}^1$, nas questões anteriores, os vértices elevados ao "número de lados" é igual 1, e, recíprocamente, qualquer vértice é uma das raízes $n-$ésima da unidade em que n é o número de vértices.*

11. Raízes da unidade *Encontre, geométricamente, todas as raízes $\sqrt[7]{1}$. Descreva algébricamente as raízes encontradas. Sugestão: use a notação de Euler.*

12. *Calcule a imagem $f(z)$ com*

$$f(z) = 1 + 2z + z^2 \tag{24}$$

$$\begin{array}{llll} z = i & z = -i & z = 1+i & z = 1-i \\ z = 2+3i & z = 2-3i & z = -2+3i & z = -2-3i \end{array} \tag{25}$$

13. *Calcule a imagem $f(z)$ com*

$$f(z) = \frac{1}{z} \tag{26}$$

$$\begin{array}{llll} z = i & z = -i & z = 1+i & z = 1-i \\ z = 2+3i & z = 2-3i & z = -2+3i & z = -2-3i \end{array} \tag{27}$$

Calcule $f(z)$ quando $z = a + bi$ e discuta quando é impossível calcular a imagem.

Faça uma pequena redação com o título "inverso multiplicativo de números complexos".

14. *Resolva as equações (justifique todas as passagens):*

$$3 + z = 4 + 2i \tag{28}$$

$$(3 + 2i)z + 5 - 3i = 7 - i \tag{29}$$

$$z^2 + 2z + 3 = 0 \tag{30}$$

$$z^3 + 3z^2 + 5z = 0 \tag{31}$$

15. *Considere um polinômio P a coeficientes reais. Mostre que se $P(z) = 0$ então $P(\overline{z}) = 0$* , em outras palavras, *se z for uma raíz de P então o seu conjugado $\overline{z}$ também será uma raíz.*

16. *Considere* $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ *um polinômio a coeficientes complexos. Desenvolva a expressão de* P *considerando*

$$a_0 = u_0 + v_0 \; ; \; a_1 = u_1 + v_1 \; ; \; a_2 = u_2 + v_2 \; ; \; z = x + iy \tag{32}$$

e encontre a expressão das partes reais e imaginárias de P *tal que*

$$P(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Referências Bibliográficas

[1] Tom M Apostol
Calculus Blaisdell Publishing Company - 1962
ou um outro livro qualquer de Cálculo

[2] Thomas Williams, Colin Kelley and many others
Gnuplot: Um programa para fazer gráficos
http://www.gnuplot.info
Distribuido livremente.

[3] Lang, Serge *Estruturas Algébricas*
ou um outro livro qualquer de Álgebra

[4] Nachbin, Leopoldo -
Introdução à Álgebra
ou um outro livro qualquer de Álgebra

[5] Schetchman, W. et alli
`Maxima` Um programa de computação algébrica
http://www.maxima.org
Distribuido sob `GPL`

[6] Guido van Rossum et allii
Python, uma linguagem de programação
http://www.python.org

[7] Praciano-Pereira, T *Cálculo Avançado* - Publicação Preliminar - Dep. de Matemática - Universidade Federal do Rio Grande - Rio Grande - RS - 1998
http://www.4shared.com/file/18104572/4d05bd7e/avancado.html

[8] Praciano-Pereira, T *Programas para Cálculo Numérico - programas.tgz*
http://www.4shared.com/dir/2041165/e14cc331/programas.html

[9] Grupo do Scilab no INRIA

`Scilab` Um programa para fazer Álgebra Linear computacionalmente - Cálculo Numérico

http://www.scilab.org

Distribuido sob `GPL`

[10] Paul R. Wolfson *The crooked made stright: Roberval and Newton on tangents*

The American Mathematical Monthly Vol 108, n^{o}3 pag 206-216 - 2001