Variáveis complexas **Lista 01**
O plano complexo tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira **Dep. de Matemática**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú 24 de outubro de 2007

Documento escrito com LaTeX - sis. op. Debian/Gnu/Linux

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, caso você responda em papel, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

As listas podem ser respondidas eletrônicamente, analise a informação sobre a entrega de arquivos. Tudo que você escrever em papel estará perdido e provoca poluição, o que você escrever eletronicamente, poderá re-utilizar posteriormente em outro trabalho.

Aprenda a usar LaTeX , para escrever matemática.

Exercícios 1 *O plano complexo objetivo: Conduzí-l@ a dominar as operações elementares com números e funções definidas em* **C**. *Parte significativa deste trabalho é* a representação gráfica dos números complexos, *sendo bem feita @ conduzirá a uma intuição significativa sobre estes números.*

A lista está estruturada como um tutorial, cada questão contribui para uma compreensão da que vem depois.

As questões discursivas tem o objetivo conduzí-l@ a ser um@ autor@ de textos matemáticos. Escreva livremente.

palavras chave: *representação geométrica dos complexos, forma polar, conjugado, inverso, funções polinômiais.*

1. *produto*

   (a) *Calcule o produto, dois a dois*[1], *dos números complexos*

   $$\begin{array}{cccc} i & -i & 1+i & 1-i \\ 2+3i & 2-3i & -2+3i & -2-3i \end{array} \tag{1}$$

   (b) *Calcule o produto dos números complexos*

   $$z = \alpha + i\beta \ ; \ w = \gamma + i\delta \tag{2}$$

   e escreva a fórmula do produto mostrando como obter a parte real e a parte imaginária.

2. *representação geométrica*

   (a) *Represente geométricamente os números complexos*

   $$\begin{array}{cccc} i & -i & 1+i & 1-i \\ 2+3i & 2-3i & -2+3i & -2-3i \end{array} \tag{3}$$

   (b) *Desenhe o círculo unitário e marque a projeção de cada um dos números complexos acima no círculo unitário. Cálcule o arco determinado por cada um destes números e o seu módulo.*

3. *notação de Euler*

   (a) *notação de Euler Considere* $\mathbf{S}^1$, *o círculo unitário de centro na origem como sendo o conjunto de todos os números complexos unitários. Desenhe* $\mathbf{S}^1$ *e observe que a* notação, forma polar,

   $$e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta) \tag{4}$$

   identifica qualquer ponto em $\mathbf{S}^1$ *usando como referência a "origem"* $(1, 0)$ *e o arco* θ. *Marque os números*

   $$e^{i\alpha} \ ; \ \alpha \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{-\pi}{4}, \frac{-\pi}{2}, \frac{-3\pi}{4}\} \tag{5}$$

[1]Há 64 cálculos solicitados aqui, você não precisa fazer todos, e pode fazê-los em equipe, o objetivo é ganhar experiência e não trabalhar excessivamente. A decisão é sua!

(b) notação de Euler *Considere um número complexo, z, no plano. Ele determina um círculo com centro na origem.*

i. *Trace o círculo e também* $\mathbf{S}^1$. *Verifique que a projeção de z sobre* $\mathbf{S}^1$ *determina um ângulo γ e que portanto*

$$z = \rho e^{i\gamma} \tag{6}$$

ii. Escreva as fórmulas. *Explicite ρ e γ.*

iii. *Justifique porque o par (ρ, γ) se chama "coordenadas polares de z". Encontre as* coordenadas polares *dos números complexos*

$$\begin{array}{llll} i & -i & 1+i & 1-i \\ 2+3i & 2-3i & -2+3i & -2-3i \end{array} \tag{7}$$

iv. *Faça uma pequena redação explicando como funciona a* forma polar, *como, dados (ρ, θ) podemos encontrar o ponto P no plano e vice-versa, como dado um ponto $P = (x, y)$ podemos encontrar suas coordenadas polares.*

4. Vértices do polígono de 8 lados

(a) *Verifique que os pontos $e^{i\alpha}$ na equação (5) determinam um polígono regular convexo de 8 lados inscrito no círculo* $\mathbf{S}^1$.

(b) representação geométrica *Verifique que os números complexos identificados pela equação (5), formam um grupo multiplicativo. Faça a tabela de multiplicação usando a* notação de Euler. *Mostre que existe um isomorfismo de grupos com o grupo aditivo*

$$G = \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{-\pi}{4}, \frac{-\pi}{2}, \frac{-3\pi}{4}\} = \mathbf{R}/2\pi \tag{8}$$

em que a adição é feita módulo-2π. *Faça a tabela de adição do grupo* $(G, +)$.

5. Polígono de 5 lados *Encontre um polígono de 5 lados inscrito em* $\mathbf{S}^1$, *que determine um grupo multiplicativo de números complexos. Exiba o grupo aditivo que lhe é isomorfo.*

6. Polígono de 9 lados *Encontre um polígono de 9 lados inscrito em* $\mathbf{S}^1$, *que determine um grupo multiplicativo de números complexos. Exiba o grupo aditivo que lhe é isomorfo.*

7. Polígono de n lados *Descreva os vértices de um polígono de n lados inscrito em* $\mathbf{S}^1$, *que determine um grupo multiplicativo de números complexos. Exiba o grupo aditivo que lhe é isomorfo.*

8. Raízes da unidade *Verifique que em todos os polígonos inscritos em* $\mathbf{S}^1$, *nas questões anteriores, os vértices elevados ao "número de lados" é igual 1, e, reciprocamente, qualquer vértice é uma das raízes $n-$ésima da unidade em que n é o número de vértices.*

9. Raízes da unidade *Encontre, geométricamente, todas as raízes* $\sqrt[7]{1}$. *Descreva algébricamente as raízes encontradas. Sugestão: use a notação de Euler.*

10. *Calcule a imagem $f(z)$ com*

$$f(z) = 1 + 2z + z^2 \tag{9}$$

$$\begin{array}{llll} z = i & z = -i & z = 1+i & z = 1-i \\ z = 2+3i & z = 2-3i & z = -2+3i & z = -2-3i \end{array} \tag{10}$$

11. *Calcule a imagem $f(z)$ com*

$$f(z) = \frac{1}{z} \tag{11}$$

$$\begin{array}{llll} z = i & z = -i & z = 1+i & z = 1-i \\ z = 2+3i & z = 2-3i & z = -2+3i & z = -2-3i \end{array} \tag{12}$$

Calcule $f(z)$ quando $z = a + bi$ e discuta quando é impossível calcular a imagem.

Faça uma pequena redação com o título "inverso multiplicativo de números complexos".

12. *Resolva as equações (justifique todas as passagens):*

$$3 + z = 4 + 2i \tag{13}$$

$$(3 + 2i)z + 5 - 3i = 7 - i \tag{14}$$

$$z^2 + 2z + 3 = 0 \tag{15}$$

$$z^3 + 3z^2 + 5z = 0 \tag{16}$$

13. *Considere um polinômio P a coeficientes reais. Mostre que se $P(z) = 0$ então $P(\overline{z}) = 0$* , em outras palavras, *se z for uma raíz de P então o seu conjugado $\overline{z}$ também será uma raíz.*

14. *Considere $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ um polinômio a coeficientes complexos. Desenvolva a expressão de P considerando*

$$a_0 = u_0 + v_0 \ ; \ a_1 = u_1 + v_1 \ ; \ a_2 = u_2 + v_2 \ ; \ z = x + iy \tag{17}$$

e encontre a expressão das partes reais e imaginárias de P tal que

$$P(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$