Variáveis Complexas
Tarcisio Praciano-Pereira
Licenciatura em Ciências - Matemática
Universidade Estadual Vale do Acaraú - UeVA
Sobral, 31 de julho de 2007 tarcisio@member.ams.org - fone 55 88 36131951

0.1 Curvas planas

A parametrização de uma variedade é uma forma de construir um morfismo entre ela e outra variedade mais simples. É uma codificação, se você quiser, de um objeto através de outro que de alguma forma consideramos fácil de entender.

Dito com outras palavras, e com um exemplo, ao escrevermos a parametrização da reta

$$(t, at, bt) \in \mathbf{R}^3 \ ; \ t \in \mathbf{R} \tag{1}$$

estamos dizendo que a reta real real, $\mathbf{R}$ é o objeto mais simples que usamod como decodificador para esta reta que é paralela ao vetor

$$(1, a, b) \tag{2}$$

Estamos usando duas informações básicas, a reta $t \in \mathbf{R}$, e o vetor que de alguma forma nos fornece os *cosenos* diretores da reta, para identificar a reta de uma forma bem precisa.

Este método é extremamente poderoso e muito pouco usado na prática. Podemos obter curvas extremamente complicadas usando esta forma de descrição, algumas são tão complicadas que é difícil depois de lhes obter o gráfico, tome como exemplo

$$\mathbf{R}^3 \ni (tcos(t), tsin(t), t) \ ; \ t \in \mathbf{R} \tag{3}$$

que é uma hélice que parte da origem mas o módulo do vetor posição cresce na proporção de $t\sqrt{2}$.

Vou me restringir às curvas planas porque o meu objetivo é o conjunto dos números complexos. Vou aproveitar o exemplo da equação (3), que eu consegui descrever de forma simples porque usei uma comparação que é possível fazer daquela curva com uma outra curva mais simples,

$$(cos(t), sin(t)) \in \mathbf{R} \tag{4}$$

que é o círculo trigonométrico. A curva descrita pela equação (3) é uma deformação da curva descrita pela equação (4). Eu disse "*deformação*" mas poderia ter dito "*transformação*", que é uma *palavra chave* neste contexto.

Muito do que vamos fazer aqui é "*transformar*" uma curva padrão em outras menos padronizadas, e as curvas centrais nestas transformações serão *retas*, *círculos trigonométricos* ou *retângulos*.

Alguns autores escreveriam apenas *círculo trigonométrico* porque estou usando no plural com significando que vou considerar círculos centrados em algum ponto (a, b) do plano e outros autores estariam pensando que círculos e quadrados são semelhantes, em ambos casos curvas fechadas.

Um dos resultados mais importantes desta teoria que estamos estudando está ligado com esta última semelhança, vamos estar muito associados com funções, campos vetoriais, cujas integrais sobre curvas ignoram o tipo da curva se elas forem fechadas, dentro de um domínio, são os *campos vetoriais conservativos.* Para estes campos, calcular a integral sobre a fronteira de um retângulo ou de um círculo, leva ao mesmo resultado, no domínio em que os campos sejam conservativos.

Acho que esta introdução justifica o esforço para compreender e aprender parametrização de curvas que é objetivo da lista de exercícios seguinte.

Exercícios 1 *Parametrização de curvas*

Curvas são variedades de dimensão 1 e uma forma de compreender a dimensão consiste em calcular o número de variáveis livres que a equação contém.

1. *Verifique, justifique, se as equações seguintes representam retas. Use o conceito de dimensão e o tipo de variedade algébrica envolvida.*

   a) $3x = 4y + 3$ *b)* $4(x - a) = 3(y - b)$
   c)$3(x - 1) = -5(y - 3)$ *d)* $3(x - 1) = 4(y - 2) = 7(z - 7)$
   e)$3(x - 1) - 5(y - 3) = z$ *d)* $3(x - 1) - 4(y - 2) = 7(z - 7)$
   f) $x = y = z = w$ *g)* $x - y - z = w$
   h) $x - y = z - w$ *i)*$x - y = z = w$

2. *Escreva as equações paramétricas das seguintes curvas planas*

   a) reta de coeficiente angular m .
   b) reta de coeficiente angular m *passando pelo ponto* $P = (a, b)$.
   c) repita a questão anterior com $m \in \{-2, -1, 2, 1\}, (a, b) \in \{(1, -2), (2, -1)\}$
   d) círculo de centro na origem e raio $r = 1$
   e) círculo de centro (a, b) *e raio* r

3. *Para cada uma das equações paramétricas, na questão anterior, calcule a derivada e faça o gráfico de um vetor tangente em alguns pontos da curva. Observe que a derivada fornece um vetor paralelo ao vetor tangente, não o vetor tangente no ponto. Descreva isto detalhadamente com suas palavras.*

4. *Escreva as equações paramétricas das curvas*

   (a) *Uma parábola com eixo paralelo a* OY.
   (b) *Uma parábola com eixo paralelo a* OX.
   (c) *Uma elipse cujo eixo maior seja paralelo a* OX.

(d) *Uma elipse cujo eixo maior seja paralelo a OY.*

(e) *Uma elipse cujos eixos não sejam paralelos aos eixos coordenados.*

5. *Para cada uma das equações paramétricas, na questão anterior, calcule a derivada e faça o gráfico de um vetor tangente em alguns pontos da curva. Observe que a derivada fornece um vetor paralelo ao vetor tangente, não o vetor tangente no ponto. Descreva isto detalhadamente com suas palavras.*

6. *Prove que no caso do círculo de centro na origem, o vetor tangente é perpendicular ao vetor posição. Encontre resultado semelhante para o caso em que o círculo não tenha centro na origem.*

7. *Cálcule a derivada para cada uma das curvas*

a) $(tcos(t), sin(t)$	*b)* $(1, cos(t))$	*c)*$(t, cos(t))$
d) $(sin^2(t), cos^2(t))$	*e)*$(cos(t^2), sin(t^2))$	*f)* $(sin(1+t^3), cos(1+t^3))$

8. *Faça os gráficos das curvas cujas equações estão acima, para $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Observe que* `gnuplot` *sabe fazer gráficos em coordenadas polares.*