

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção caso você entregue pelo método medieval. Se você quiser entregar o trabalho eletronicamente, acesse a página da disciplina e procure o link “entrega de trabalhos”. Por favor, siga as instruções sobre nomes de arquivos:

disc\_curso\_seunome\_XX.pdf

em que disc\_curso identifica seu curso e a disciplina que você faz comigo:

curso varcom XX é 02 para esta lista, e pdf é o tipo de formatação que você der ao seu trabalho.

Data da entrega da lista: dia 21 de Novembro, quarta-feira, até 22:00 h na secretaria do curso ou até 24:00 na página da disciplina.

## 0.1 Exercícios

objetivo: Vamos ver que a derivada de uma função complexa obedece as mesmas regras da derivação de funções reais.

Considere estas contas uma revisão do Cálculo onde aparece uma constante,  $i$ , que nada mais do que uma constante, (sem complexos).

palavras chave: função complexa, derivada, parte real, parte imaginária, função linear complexa, equações de Cauchy-Riemann, função analítica.

1. A função complexa mais simples seria a identidade,

$$f(z) = z ; x + iy \mapsto x + iy \quad (1)$$

Calcule o quociente de diferenças:

$$\frac{f(x+h+iy+k) - f(x+iy)}{h+ik} \quad (2)$$

e deduza que a derivada da função identidade é 1.

sugestão:  $f(x+iy) = x+iy$

2. Calcule o quociente de diferenças para a função  $f(z) = z^2$  e verifique qual é a sua derivada.
3. transformação linear do plano no plano Vamos mostrar que as transformações lineares do plano complexo no plano complexo satisfazem as *equações de Cauchy-Riemann*.

- (a) Considere um número complexo  $\omega = a + bi$  a transformação

$$z \mapsto \omega z$$

é uma transformação linear de  $\mathbf{C}$  em  $\mathbf{C}$ , verifique isto.

- (b) Expresse a transformação linear do item anterior como uma função de  $\mathbf{R}^2$  em  $\mathbf{R}^2$ , usando  $(a, b)$  para  $\omega$  e  $(x, y)$  para  $z = x + iy$ .

- (c) Calcule a *matriz real* da transformação linear complexa definida no item anterior, portanto uma matriz  $2 \times 2$ .

- (d) Verifique qua a matriz real da transformação linear complexa tem é da forma

equações de Cauchy-Riemann

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad (3)$$

- (e) Considere uma função complexa  $f = u + iv$ , que também pode ser considerada uma função  $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ . Num ponto em que função seja diferenciável a sua derivada representa uma transformação linear, é o coeficiente angular do objeto linear tangente. Verifique que a expressão desta transformação linear, escrita usando a jacobiana de  $f$  como função do  $\mathbf{R}^2$  no  $\mathbf{R}^2$ , satisfaz às equações de Cauchy-Riemann. Enuncie este fato como um teorema.

## 0.2 Epílogo

Como o conjunto das matrizes que satisfazem as equações de Cauchy-Riemann é um subconjunto próprio do conjunto de todas as matrizes (justifique isto), então o conjunto das funções complexas que tenham derivada complexa (satisfazendo às equações de Cauchy-Riemann) é um subconjunto próprio de todas as funções complexas. Chamamos estas, as que têm derivada complexa, de *funções analíticas*.

## Referências Bibliográficas

- [1] Tom M Apostol  
*Calculus* Blaisdell Publishing Company - 1962  
ou um outro livro qualquer de Cálculo
- [2] Thomas Williams, Colin Kelley and many others  
*Gnuplot: Um programa para fazer gráficos*  
<http://www.gnuplot.info>  
Distribuido livremente.
- [3] Lang, Serge *Estruturas Algébricas*  
ou um outro livro qualquer de Álgebra
- [4] Nachbin, Leopoldo -  
*Introdução à Álgebra*  
ou um outro livro qualquer de Álgebra
- [5] Schetchman, W. et alli  
*Maxima* Um programa de computação algébrica  
<http://www.maxima.org>  
Distribuido sob GPL
- [6] Praciano-Pereira, T *Cálculo Avançado* - Publicação Preliminar - Dep. de Matemática - Universidade Federal do Rio Grande - Rio Grande - RS - 1998  
<http://www.4shared.com/file/18104572/4d05bd7e/avancado.html>
- [7] Grupo do Scilab no INRIA  
*Scilab* Um programa para fazer Álgebra Linear computacionalmente - Cálculo Numérico  
<http://www.scilab.org>  
Distribuido sob GPL