

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú 25 de setembro de 2007

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco, se você resolver entregar em papel. Ela será usada na correção.

Exercícios 1 *Operações geométricas com números complexos objetivo: Compreender o significado geométrico dos números complexos e a tradução algébrica dos mesmos. Mostrar uma forma diferente de fazer trigonometria, em particular a fórmula da soma de arcos que você pode memorizar como um produto de números complexos.*

palavras chave: módulo, círculo unitário, ângulo, conjugado, translação, soma de arcos

Círculo unitário é o conjunto dos números complexos de módulo 1. Vamos chamá-lo de \mathbf{S}^1 . Faça um gráfico.

1. Mostre que o produto de dois números complexos de módulo 1 é outro número complexo de módulo 1. Quer dizer que \mathbf{S}^1 é fechado para o produto.
2. Mostre que as propriedades associativas e comutativas valem para a multiplicação em \mathbf{S}^1 e que existe um elemento neutro para multiplicação.
3. Conclua que (\mathbf{S}^1, \cdot) é um grupo multiplicativo de números complexos (um subgrupo do grupo de todos os números complexos excetuando o zero).
4. A fórmula de Euler

Associe a cada número complexo z o seu argumento, θ , o arco de \mathbf{S}^1 que vai desde $(0, 1)$ até a extremidade do vetor que representa geometricamente z . Notação $\theta = \arg(z)$. Mostre que $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

$$z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta); \theta = \arg(z)$$

Este exercício vai lhe mostrar um caminho lógico para concluindo que

$$e^{i\theta} e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)}$$

usando a fórmula de Euler

Considere agora $e^{i\gamma} = e^{i\theta} e^{i\alpha}$ o produto de dois números complexos unitários, (vale a fórmula de Euler). Mostre, usando distância entre dois pontos, que

$$d(e^{i\gamma}, e^{i\theta}) = d(e^{i\alpha}, 1)$$

depois conclua que isto prova (geometricamente) que

$$e^{i\gamma} = e^{i\theta} + e^{i\alpha}$$

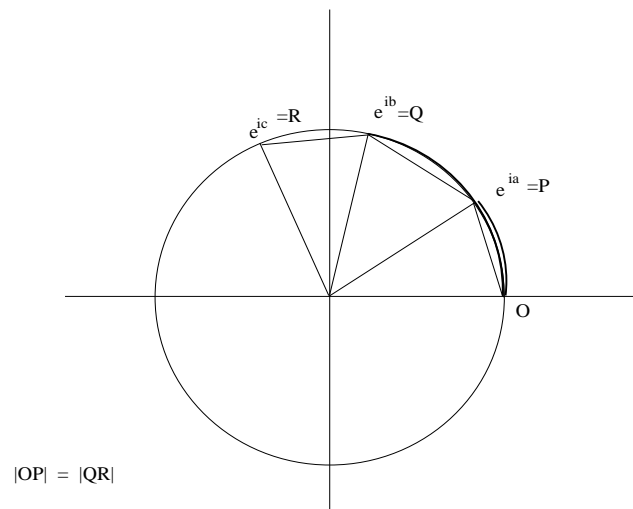


Figura 1: Produto de números complexos unitários

sugestão: veja a representação geométrica na figura (1) página 2, para se convencer de que é verdade.

5. Generalizando a questão anterior

Demonstre que o produto de números complexos no \mathbf{S}^1 se obtém com a soma de arcos (fórmula do logaritmo).