

## 0.2 Informações

Por favor, se você usar o método medieval para entrega desta lista, em papel, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção. Se você quiser entregar o trabalho eletronicamente, acesse a página da disciplina em

<http://www.sobralmatematica.org>

e procure o link “entrega de trabalhos”. Por favor, siga as instruções sobre nomes de arquivos:

`varcom_mat_seunome_XX.pdf`

XX é 05 para esta lista, e pdf é o tipo de formatação que você der ao seu trabalho.

Data da entrega da lista: dia 26 de Março, quarta-feira. Se o trabalho for feito em equipe, *cada aluno deve entregar o seu porque a entrega do trabalho é o registro de sua frequência*, quem **não entregar** o trabalho na data certa terá *falta* na semana.

## 0.3 Orientação

O teorema de Green, chamado familiarmente (TG), tem interpretação extremamente simples que o tranforma numa generalização do Teorema Fundamental do Cálculo, o (TFC).

Que diz o TFC ? que se  $dF$  for uma derivada, então  $\int_a^b dF = F(b) - F(a)$ , isto é a variação de  $dF$  no intervalo  $[a, b]$  é a “diferença de potencial”  $F(b) - F(a)$ .

A novidade com o TG é que  $dF$  não precisa ser um *campo conservativo* e é aí que temos o caso não trivial<sup>1</sup> do TG. Em duas variáveis um diferencial se escreve assim:

$$dz = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (1)$$

Se houver uma função  $z = F(x, y)$  tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) ; \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) ; \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>porque quando  $F$  for um potencial, no TG dá zero...

então a equação (1) é um diferencial exato, é um potencial e conseqüentemente se calcularmos a sua integral ao longo de uma curva fechada o resultado é zero. Se não for acontece alguma coisa interessante e vamos ver as conseqüências disto nesta lista.

Preciso da definição de curva:

**Definição 1** *Curva*

Uma curva é uma função diferenciável definida num intervalo da reta e com valores num espaço vetorial.

Quer dizer que as funções de uma variável real, diferenciáveis, do Cálculo são curvas, mas em geral pensamos que o espaço de chegada tenha dimensão maior do que 1, são os casos interessantes. Um exemplo comum, na figura (1), página 2, é o círculo unitário, o chamado círculo trigonométrico, você pode ver um

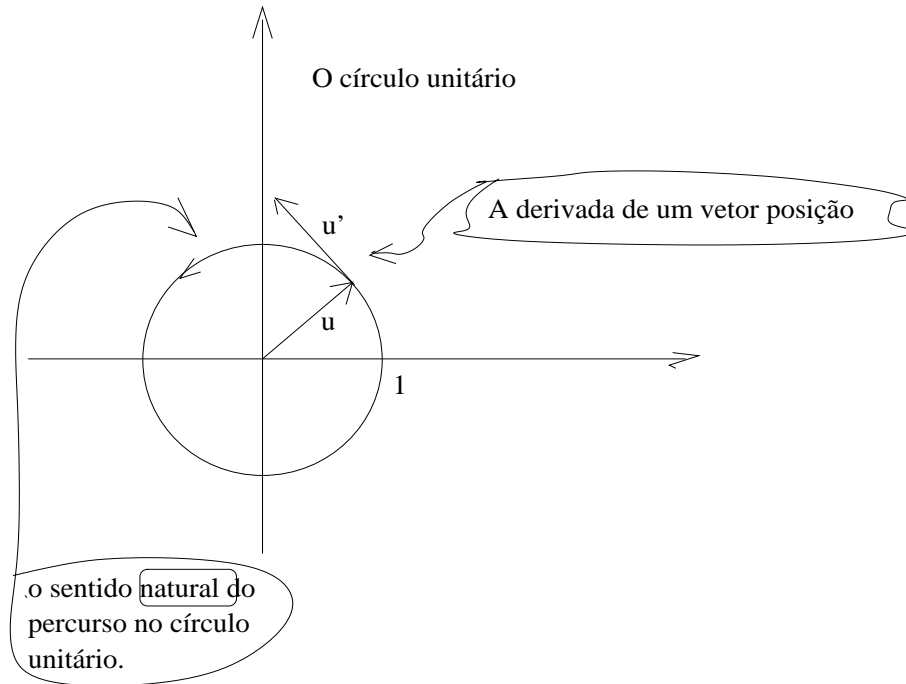


Figura 1: O círculo unitário

vetor posição,  $(\cos(t), \sin(t))$  que, derivado e translado para para a posição  $(\cos(t), \sin(t))$ , corresponde à figura (1). A derivada de um vetor posição mostra o sentido natural do percurso no círculo unitário, a chamada orientação positiva. O parâmetro  $t$  pode<sup>2</sup> estar no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Então um círculo é

$$[0, 2\pi] \ni t \rightarrow (\cos(t), \sin(t)) = s(t) \in \mathbf{R}^2 \tag{3}$$

<sup>2</sup>Pode, mas não precisa, pode ser  $[0, 2\pi)$  ou  $[0, 4\pi]$ , pense no significado disto.

e o intervalo  $[0, 2\pi]$  é chamado de intervalo de parametrização desta curva. Você pode ler mais a respeito em [1], ou qualquer livro com o título Cálculo Avançado o que tiver no índice o Teorema de Green.

objetivo: Objetivo curvas planas e integral de linha.

palavras chave: integral de linha, teorema de Green, integral de Cauchy, potencial, Teorema Fundamental do Cálculo.

## 0.4 Exercícios

### Exercícios 1 Teorema de Green e de Cauchy

1. uma mudança de variável A função derivada da parametrização do círculo pode ser vista como uma nova curva também parametrizada no intervalo  $[0, 2\pi]$  (vale muito pouco, geometricamente pensar nisto uma vez que o resultado parece ser o mesmo). Mas podemos interpretar isto como uma composição de funções e vou tirar algum proveito deste resultado geométrico inútil. Veja a idéia na figura (2) página 3. A função composta

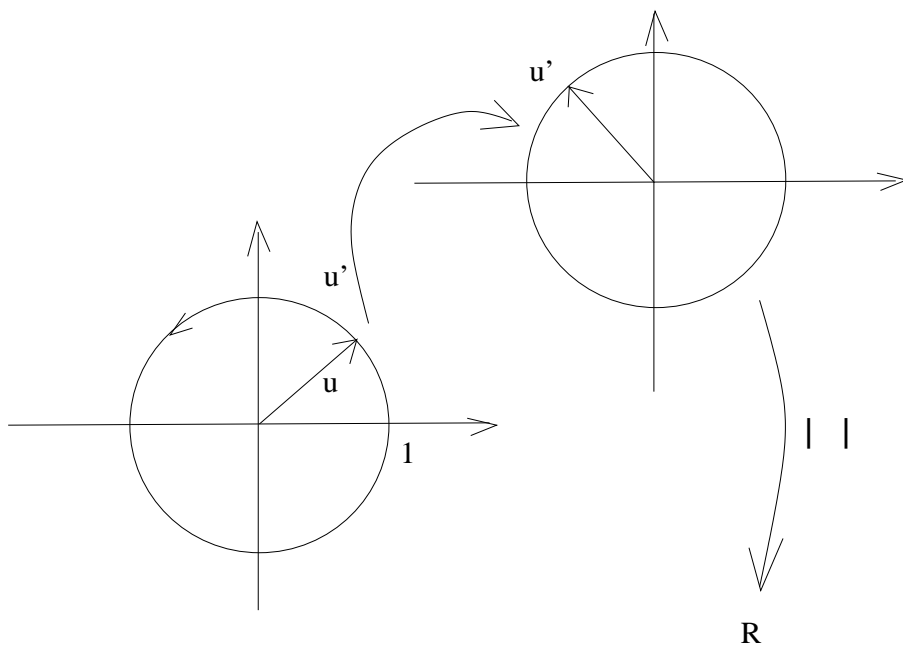


Figura 2: Uma composição de funções ou mudança de variável

está definida no primeiro círculo tomando valores em  $\mathbf{R}$ .

- (a) Quanto vale a função composta definida na figura (2), em cada ponto do círculo ?

- (b) Complete o circuito e defina agora uma função composta que parte do intervalo de parametrização,  $[0, 2\pi]$  e chega em  $\mathbf{R}$ , portanto uma função

$$[0, 2\pi] \ni t \mapsto |s'(t)| = f(t) ; f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R} \quad (4)$$

Calcule a integral desta função e analise o surpreendente resultado de termos aproveitado uma coisa inútil, noventa por cento da Matemática se faz com aproveitamentos de coisas inúteis bem aproveitadas...

2. Uma mudança de variáveis. Considere a parametrização do círculo, equação (3). Em cada um dos casos abaixo temos uma função definida no  $\mathbf{R}^2$ , portanto elas podem ser restritas ao círculo e assim “deformam o círculo” em outra figura (dependo do espaço de chegada), mas via círculo elas definem uma parametrização da imagem deformada no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Esqueça a imagem deformada que poderia ser obtida, ela pode ser construída por um programa semelhante ao que fizemos para as imagens de retângulos e círculos. Em cada caso calcule a integral da composta (uma integral vetorial, como as derivadas, a integral de cada componente):

$$F(x, y) = x^2 + y^2 \quad (5)$$

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) ; u(x, y) = x^2 - y^2 ; v(x, y) = 2xy \quad (6)$$

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) ; u(x, y) = x^2 ; v(x, y) = y^2 \quad (7)$$

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) ; u(x, y) = x ; v(x, y) = -y \quad (8)$$

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) ; u(x, y) = x^3 - 3xy^2 ; v(x, y) = 3x^2y - y^3 \quad (9)$$

$$(10)$$

# Referências Bibliográficas

- [1] Buck, R. C. and Buck E. F. *Advanced Calculus* McGraw-Hill - 1965
- [2] Tom M Apostol  
*Calculus* Blaisdell Publishing Company - 1962  
ou um outro livro qualquer de Cálculo
- [3] Thomas Williams, Colin Kelley and many others  
*Gnuplot: Um programa para fazer gráficos*  
<http://www.gnuplot.info>  
Distribuido livremente.
- [4] Lang, Serge *Estruturas Algébricas*  
ou um outro livro qualquer de Álgebra
- [5] Nachbin, Leopoldo -  
*Introdução à Álgebra*  
ou um outro livro qualquer de Álgebra
- [6] Schetchman, W. et alli  
*Maxima* Um programa de computação algébrica  
<http://www.maxima.org>  
Distribuido sob GPL
- [7] Praciano-Pereira, T *Cálculo Avançado* - Publicação Preliminar - Dep. de Matemática - Universidade Federal do Rio Grande - Rio Grande - RS - 1998  
<http://www.4shared.com/file/18104572/4d05bd7e/avancado.html>
- [8] Grupo do Scilab no INRIA  
*Scilab* Um programa para fazer Álgebra Linear computacionalmente - Cálculo Numérico  
<http://www.scilab.org>  
Distribuido sob GPL

[9] *A enciclopédia livre na Internet*

<http://pt.wikipedia.org> <http://www.wikipedia.org>

# Referências Bibliográficas

- [1] Tom M Apostol  
*Calculus* Blaisdell Publishing Company - 1962  
ou um outro livro qualquer de Cálculo
- [2] Thomas Williams, Colin Kelley and many others  
*Gnuplot: Um programa para fazer gráficos*  
<http://www.gnuplot.info>  
Distribuido livremente.
- [3] Lang, Serge *Estruturas Algébricas*  
ou um outro livro qualquer de Álgebra
- [4] Nachbin, Leopoldo -  
*Introdução à Álgebra*  
ou um outro livro qualquer de Álgebra
- [5] Schetchman, W. et alli  
*Maxima* Um programa de computação algébrica  
<http://www.maxima.org>  
Distribuido sob GPL
- [6] Praciano-Pereira, T *Cálculo Avançado* - Publicação Preliminar - Dep. de Matemática - Universidade Federal do Rio Grande - Rio Grande - RS - 1998  
<http://www.4shared.com/file/18104572/4d05bd7e/avancado.html>
- [7] Grupo do Scilab no INRIA  
*Scilab* Um programa para fazer Álgebra Linear computacionalmente - Cálculo Numérico  
<http://www.scilab.org>  
Distribuido sob GPL
- [8] *A enciclopédia livre na Internet*  
<http://pt.wikipedia.org> <http://www.wikipedia.org>