

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, caso você responda em papel, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

As listas podem ser respondidas eletronicamente, analise a informação sobre a entrega de arquivos. Tudo que você escrever em papel estará perdido e provoca poluição, o que você escrever eletronicamente, poderá re-utilizar posteriormente em outro trabalho.

Aprenda a usar L^AT_EX, para escrever matemática.

Exercícios 1 *O plano complexo objetivo: Conduzi-l@ a dominar as operações elementares com números e funções definidas em C. Parte significativa deste trabalho é a representação gráfica dos números complexos, sendo bem feita @ conduzirá a uma intuição significativa sobre estes números.*

A lista está estruturada como um tutorial, cada questão contribui para uma compreensão da que vem depois.

As questões discursivas tem o objetivo conduzi-l@ a ser um@ autor@ de textos matemáticos. Escreva livremente.

palavras chave: representação geométrica dos complexos, forma polar, conjugado, inverso, funções polinômiais.

1. produto

(a) Calcule o produto, dois a dois¹, dos números complexos

$$\begin{matrix} i & -i & 1+i & 1-i \\ 2+3i & 2-3i & -2+3i & -2-3i \end{matrix} \quad (1)$$

(b) Calcule o produto dos números complexos

$$z = \alpha + i\beta ; w = \gamma + i\delta \quad (2)$$

e escreva a fórmula do produto mostrando como obter a parte real e a parte imaginária.

2. representação geométrica

¹Há 64 cálculos solicitados aqui, você não precisa fazer todos, e pode fazê-los em equipe, o objetivo é ganhar experiência e não trabalhar excessivamente. A decisão é sua!

(a) Represente geometricamente os números complexos

$$\begin{matrix} i & -i & 1+i & 1-i \\ 2+3i & 2-3i & -2+3i & -2-3i \end{matrix} \quad (3)$$

(b) Desenhe o círculo unitário e marque a projeção de cada um dos números complexos acima no círculo unitário. Calcule o arco determinado por cada um destes números e o seu módulo.

3. notação de Euler

(a) notação de Euler Considere **S**, o círculo unitário de centro na origem como sendo o conjunto de todos os números complexos unitários. Desenhe **S** e observe que a notação, forma polar,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (4)$$

identifica qualquer ponto em **S** usando como referência a "origem" $(1, 0)$ e o arco θ . Marque os números

$$e^{i\alpha} ; \alpha \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right\} \quad (5)$$

(b) notação de Euler Considere um número complexo, z , no plano. Ele determina um círculo com centro na origem.

i. Trace o círculo e também **S**. Verifique que a projeção de z sobre **S** determina um ângulo γ e que portanto

$$z = \rho e^{i\gamma} \quad (6)$$

ii. Escreva as fórmulas. Explícite ρ e γ .

iii. Justifique porque o par (ρ, γ) se chama "coordenadas polares de z ". Encontre as coordenadas polares dos números complexos

$$\begin{matrix} i & -i & 1+i & 1-i \\ 2+3i & 2-3i & -2+3i & -2-3i \end{matrix} \quad (7)$$

iv. Faça uma pequena redação explicando como funciona a forma polar, como, dados (ρ, θ) podemos encontrar o ponto P no plano e vice-versa, como dado um ponto $P = (x, y)$ podemos encontrar suas coordenadas polares.

4. Vértices do polígono de 8 lados

(a) Verifique que os pontos $e^{i\alpha}$ na equação (6) determinam um polígono regular convexo de 8 lados inscrito no círculo **S**.

(b) representação geométrica Verifique que os números complexos identificados pela equação (6), formam um grupo multiplicativo. Faça a tabela de multiplicação usando a notação de Euler. Mostre que existe um isomorfismo de grupos com o grupo aditivo

$$G = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right\} = \mathbf{R}/2\pi \quad (8)$$

em que a adição é feita módulo- 2π . Faça a tabela de adição do grupo $(G, +)$.

5. Polígono de 5 lados Encontre um polígono de 5 lados inscrito em \mathbf{S} , que determine um grupo multiplicativo de números complexos. Exiba o grupo aditivo que lhe é isomorfo.
6. Polígono de 9 lados Encontre um polígono de 9 lados inscrito em \mathbf{S} , que determine um grupo multiplicativo de números complexos. Exiba o grupo aditivo que lhe é isomorfo.
7. Polígono de n lados Descreva os vértices de um polígono de n lados inscrito em \mathbf{S} , que determine um grupo multiplicativo de números complexos. Exiba o grupo aditivo que lhe é isomorfo.
8. Raízes da unidade Verifique que em todos os polígonos inscritos em \mathbf{S} , nas questões anteriores, os vértices elevados ao "número de lados" é igual 1, e, reciprocamente, qualquer vértice é uma das raízes n -ésima da unidade em que n é o número de vértices.
9. Raízes da unidade Encontre, geometricamente, todas as raízes $\sqrt[n]{1}$. Descreva algebricamente as raízes encontradas. Sugestão: use a notação de Euler.
10. Calcule a imagem $f(z)$ com

$$f(z) = 1 + 2z + z^2 \quad (9)$$

$$\begin{array}{cccc} z = i & z = -i & z = 1 + i & z = 1 - i \\ z = 2 + 3i & z = 2 - 3i & z = -2 + 3i & z = -2 - 3i \end{array} \quad (10)$$

11. Calcule a imagem $f(z)$ com

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad (11)$$

$$\begin{array}{cccc} z = i & z = -i & z = 1 + i & z = 1 - i \\ z = 2 + 3i & z = 2 - 3i & z = -2 + 3i & z = -2 - 3i \end{array} \quad (12)$$

Calcule $f(z)$ quando $z = a + bi$ e discuta quando é impossível calcular a imagem.

Faça uma pequena redação com o título "inverso multiplicativo de números complexos".

12. Resolva as equações (justifique todas as passagens):

$$3 + z = 4 + 2i \quad (13)$$

$$(3 + 2i)z + 5 - 3i = 7 - i \quad (14)$$

$$z^2 + 2z + 3 = 0 \quad (15)$$

$$z^3 + 3z^2 + 5z = 0 \quad (16)$$

13. Considere um polinômio P a coeficientes reais. Mostre que se $P(z) = 0$ então $P(\bar{z}) = 0$, em outras palavras, se z for uma raiz de P então o seu conjugado \bar{z} também será uma raiz.
14. Considere $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$ um polinômio a coeficientes complexos. Desenvolva a expressão de P considerando

$$a_0 = u_0 + v_0 ; a_1 = u_1 + v_1 ; a_2 = u_2 + v_2 ; z = x + iy \quad (17)$$

e encontre a expressão das partes reais e imaginárias de P tal que

$$P(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Referências Bibliográficas

- [1] Tom M Apostol
Calculus Blaisdell Publishing Company - 1962
ou um outro livro qualquer de Cálculo
- [2] Thomas Williams, Colin Kelley and many others
Gnuplot: Um programa para fazer gráficos
<http://www.gnuplot.info>
Distribuido livremente.
- [3] Lang, Serge *Estruturas Algébricas*
ou um outro livro qualquer de Álgebra
- [4] Nachbin, Leopoldo -
Introdução à Álgebra
ou um outro livro qualquer de Álgebra
- [5] Schetchman, W. et alli
Maxima Um programa de computação algébrica
<http://www.maxima.org>
Distribuido sob GPL
- [6] Praciano-Pereira, T *Cálculo Avançado* - Publicação Preliminar - Dep. de Matemática - Universidade Federal do Rio Grande - Rio Grande - RS - 1998
<http://www.4shared.com/file/18104572/4d05bd7e/avancado.html>
- [7] Grupo do Scilab no INRIA
Scilab Um programa para fazer Álgebra Linear computacionalmente - Cálculo Numérico
<http://www.scilab.org>
Distribuido sob GPL
- [8] *A enciclopédia livre na Internet*
<http://pt.wikipedia.org> <http://www.wikipedia.org>