Variáveis Complexas
Notas de aula

Praciano-Pereira, T[1]   Medeiros, Juan Carlos O.[2]

Publicação preliminar 2008.4
Lab de Matemática Computacional - UeVA

[1]tarcisio@member.ams.org
[2]juan.medeiros@gmail.com

Expressões algébricas, gráficos de sub-conjuntos do plano são os intrumentos como captamos, guardamos, transferimos as informações contidas nos números complexos.
Vamos trabalhar nesta seção com as expressões que deram origem aos números complexos de um ponto de vista puramente algébrico. O objetivo é dar-lhe os mecanismos algébricos de que iremos precisar ao longo do livro e ao mesmo tempo liberá-los de certos preconceitos ligados aos números. Poucos vêm que os números complexos são apenas os números. Se por um lado é um pouco mais difícil fazer contas com os números complexos por outro lado eles guardam e transferem mais informações em cada conta.
O primeiro capítulo pretende conduzí-l@ ao domínio destas idéias básicas, as operações e a representação geométrica dos números complexos.

1.1 O corpo dos números complexos.

1.2 Grupo e corpo

1.2.1 O plano de Gauss

A história dos números complexos está ligada com a história das equações algébricas. Depois de aceito o "número" $\underline{i}$ como $\sqrt{-1}$ foi um simples passo se compreender que os *objetos* da forma

$$z = a + bi \; ; \; a, b \in \mathbf{R} \tag{1.1}$$

eram um novo tipo de número. Mesmo depois de passados mais de duzentos anos que Gauss fez uma representação geométrica dos números complexos em sua tese de doutorado, mostrando que eles nada tinham de imaginários ou irreais, ainda assim os *números complexos* não foram inteiramente aceitos, ainda temos que fazer introduções como esta para começar a trabalhar com eles porque a Escola não os admitiu ainda no seu dia-a-dia.

Em parte a razão pela frieza com eles são tratados pela Escola diz respeito ao nome que eles ganharam que guarda os preconceitos como eles foram vistos no passado. A denominação "complexo" prepara o estudante para receber um conceito "difícil" e "pouco natural".

Neste primeiro capítulo nós vamos convidá-lo a encontrar meios para que tornemos os números complexos mais difundidos e conhecidos. Sem dúvida você leitor@ deve se sentir convidad@ a participar da redação deste livro com as idéias que lhe vierem para tornar esta difusão e vulgarização dos números complexos uma realidade. Não duvide em criticar os autores se encontrar meios mais adequados para este objetivo inclusive no que diga respeito à redação.

É preciso, entretanto, ter uma claro que metodologia não pode se confundir com superficialidade. Tornar os números complexos vulgares não significa que desejemos *tornar fácil aquilo que é difícil.* Significa que desejamos criar meios para um trabalho intenso torne esta compreensão um fato. Usei uma expressão intencionalmente, *Matemática é difícil e não pretendo torná-la fácil, o que pretendo é criar as condições de trabalho que levem os estudantes ao domínio da Matemática* e naturalmente romper um mito de que existem pessoas que podem aprender Matemática e que outras pessoas nunca o conseguirão. A verdade é que todo mundo que fizer esforço consegue dominar esta disciplina, como todos os que treinarem disciplinadamente e intensamente se poderão tornar exímios ciclistas.

A primeira lista de exercícios se dedica ao domínio de expressões do tipo

$$a + b\sqrt{n}\ ;\ n \in \mathbf{Z} \tag{1.2}$$

Exercícios 1 $a + b\sqrt{n}$
Bibliografia, veja Introdução à Matemática Universitária, *[5,* `fundam2p.pdf`*]*

1. ***Anel com coeficientes inteiros.*** ***Objetivo:*** *relembrar os conceitos de grupo, anel e corpo. Seja*

$$\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbf{Z} \tag{1.3}$$

Mostre que

(a) *$(\mathbf{Z}[\sqrt{2}], +)$ é um grupo; $(\mathbf{Z}[\sqrt{2}], \cdot)$ é um grupo e justifique sua resposta.*

(b) *$(\mathbf{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ é um anel. $(\mathbf{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ é um corpo.*

2. *Polinômios a coeficientes inteiros.* ***Objetivo:*** *relembrar os conceitos de grupo, anel e corpo e retomar o trabalho com expressões algébricas.*

Seja $\mathbf{Z}[x]$ = conjunto dos polinômios em x com coeficientes inteiros.

(a) *Considere as expressões genéricas de dois polinômios p, q de graus 4 e 5 respectivamente*

$$(4) \qquad p(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k = \tag{1.4}$$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + b_4x^4 \tag{1.5}$$

$$q(x) = \sum_{k=0}^{5} b_k x^k = \tag{1.6}$$

$$= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 \tag{1.7}$$

$$\tag{1.8}$$

e expresse o produto deles. Observe que $pq = h$ e que

$$(9) h(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \tag{1.9}$$

sendo necessário escrever a expressão de c_k em termos dos coeficientes a_k, b_k

(b) *Generalize a expressão do produto de pq para polinômios de grau n, m. Encontre a expressão dos termos c_k no produto de pq.*

(c) *Mostre que:*

i. *$(\mathbf{Z}[x], +)$ é um grupo. $(\mathbf{Z}[x], \cdot)$ é um grupo.*

ii. *$(\mathbf{Z}[x], +, \cdot)$ é um anel. $(\mathbf{Z}[x], +, \cdot)$ é um corpo.*

Polinômios a coeficientes reais. ***Objetivo:*** *relembrar os conceitos de grupo, anel e corpo e retomar o trabalho com expressões algébricas.*

Seja $\mathbf{R}[x]$ = conjunto dos polinômios em x com coeficientes reais.

1.2.2 A estrutura algébrica de $\mathbf{R}[i]$

Observação 1 *Os números complexos*

Este espaço, $\mathbf{R}[i]$ é o conjunto dos números complexos.

Números? são números realmente? Somos nós que decidimos que nome dar aos objetos que criamos. Que significam números para nós? Respondida esta pergunta, teremos condições de decidir se chamaremos os "complexos" de números, ou não. Este deve ser assunto para uma pequena monografia, um trabalho de fim graduação.

Seja $\mathbf{R}[i] = \{a + bi; a, b \in \mathbf{R}\}$.

1. Mostre que: $(\mathbf{R}[i], +)$ é um grupo; $(\mathbf{R}[i], \cdot)$ é um grupo.
2. Resolva a equação X + 3+2i = i-4 em $(\mathbf{R}[i], +)$.
3. Mostre que $(\mathbf{R}[i], +, \cdot)$ é um anel. Tem unidade? Mostre que $(\mathbf{R}[i], +, \cdot)$ é um corpo.
4. Calcule os inversos de
   (a) $3 + 2i\ ;\ i - 3\ ;\ i\ ;\ 2 + i\sqrt{2};\ \frac{4-2i}{5}$.
   (b) $0.5 - \frac{i}{3}$.
5. Resolva a equação $(2 + 3i)X + i = 3i - 5$.
6. Considere o conjunto dos números complexos z tais que

$$z^2 + 3z + 5 = 0.$$

Determine este conjunto e faça o seu grá fico no plano complexo. Considere agora o conjunto dos pares de números reais (x, y) tais que $y = x^2 + 3x + 5$. Faça o grafico deste segundo conjunto. Discuta a relação que possa haver entre os dois conjuntos.

Figura 1.1:

1.3 Derivada e integral

1.3.1 Derivada

1. Escreva a definição da derivada de $f(z) = z^2$ em um ponto $z = a$ do plano complexo.

2. Calcule a derivada de $f(z) = z^2$, a partir da definição.

3. Calcule a derivada de $f(z) = z^3 + 4z - 1$.

4. Considere a função definida por

$$f(t) = e^{it} = cos(t) + isen(t); t \in \mathbf{R}.$$

Calcule a derivada de f. Represente, para um valor arbitrário de t, e no mesmo sistema de eixos, $f(t), f'(t)$. Expresse de forma simples uma relação entre f, f'. (use conjugado...)

1.3.2 Integração

1. Calcule $\int\limits_0^{2\pi} e^{it}dt$, observe a definição anterior.

2. Expresse z^2 na forma de parte real e imaginária. Substituindo $z = z(t) = e^{it}; t \in \mathbf{R}$, calcule $\int\limits_0^{2\pi} z^2 dt$

3. Expresse z^3 na forma de parte real e imaginária. Substituindo $z = z(t) = e^{it}; t \in \mathbf{R}$, calcule $\int\limits_0^{2\pi} z^3 dt$

4. Expresse $\frac{1}{z}$ na forma de parte real e imaginária. Substituindo $z = z(t) = e^{it}; t \in \mathbf{R}$, calcule $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{z}$

1.4 Os espaços vetoriais com os complexos.

1.5 Comparando C e $\mathbf{R}^2$

Nesta lista, o espaço vetorial em consideração sempre será $\mathbf{C}$, e o `objetivo da lista` é mostrar que, sob alguns aspectos, o isomorfismo $\mathbf{C} \equiv \mathbf{R}^2$, deixa de ter sentido.

Exercícios 2 (Tutorial) *Dependência linear*

1. **dependência linear.**

- *Quantos vetores linearmente independentes é preciso para gerar* $\mathbf{C}$, *sobre o* `corpo dos reais`.

  Observação 2 *dependência linear sobre o corpo dos reais.*
  Quer dizer que os escalares $\lambda, \alpha, \cdots$ *necessários para combinar os vetores linearmente, pertencem ao corpo* $\mathbf{R}$.

- *Quantos vetores linearmente independentes é preciso para gerar* $\mathbf{C}$, *sobre o* `corpo dos complexos`.

- *Encontre a matriz da transformação a)*

$$\mathbf{C} \to \mathbf{C}; x + yi \mapsto 3x + 2yi$$

sobre o corpo dos reais.

b)

$$\mathbf{C} \to \mathbf{C}; x + yi \mapsto x + yi$$

sobre o corpo dos reais.

c)

$$\mathbf{C} \to \mathbf{C}; x + yi \mapsto x + yi$$

sobre o corpo dos complexos.

- **dimensão.** *Qual é a* `dimensão` *de* $\mathbf{C}$ *como espaço vetorial real? Qual é a* `dimensão` *de* $\mathbf{C}$ *como espaç o vetorial complexo?*

2. **transformação linear complexa e real.**

- *Quais são as propriedades de uma transformação linear real*

$$\mathbf{C} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbf{C}?$$

- *Quais são as propriedades de uma transformação linear complexa*

$$\mathbf{C} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbf{C}?$$

- *Qual é matriz de* $\mathbf{C} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbf{C}$ *como transformação linear real ?*
- *Qual é matriz de* $\mathbf{C} \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbf{C}$ *como transformação linear complexa ?*

3. **transformações lineares complexas e reais.**

$\mathcal{L}(E, E)$ *representa o conjunto das transformações lineares de* E *em* E*. Se escolhida uma base este conjunto coïncide com as matrizes. Caracterize*

$$\mathcal{L}(E, E) \ ; \ E \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}.$$

4. **transformações lineares complexas e reais.**

Caracterize as matrizes reais que também são matrizes complexas, isto é que representam transformações lineares complexas de $\mathbf{C}$ *em* $\mathbf{C}$.

5. **equações de Cauchy-Riemann.** *Mostre que a matriz* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, *de uma transformação linear* $\mathbf{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbf{R}^2$, *é uma transformação linear complexa* `se, e somente se,`

$$\boxed{a = d \text{ e } b = -c,}$$

e neste caso $\mathcal{T}$ *equivale ao número complexo* $a + bi$*, isto é,*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

porque a `dimensão` *de* $\mathbf{C}$*, como espaço vetorial complexo, é 1.*

6. **caracterização das transformações lineares complexas.**

Como uma transformação linear complexa equivale à multiplicação por um número complexo $a + bi = \rho e^{i\theta}$*, conclúa então que*

as transformações lineares complexas são as transformações lineares reais compostas de uma rotação *seguida de uma* homotetia, *podendo qualquer uma dessas ser* trivial.

1.6 A estrutura algébrica de R[i].

Seja $\mathbf{R}[i] = \{a + bi; a, b \in \mathbf{R}\}$.

Exercícios 3 1. *Verifique se* $(\mathbf{R}[i], +)$ *é um grupo.*

2. *Verifique se* $(\mathbf{R}[i], \cdot)$ *é um grupo.*
3. *Resolva a equação* X + *3+2i* = *i-4 em* $(\mathbf{R}[i], +)$.
4. *Verifique se* $(\mathbf{R}[i], +, \cdot)$ *é um anel. Tem unidade?*
5. *Verifique se* $(\mathbf{R}[i], +, \cdot)$ *é um corpo.*
6. *Calcule os inversos de*
   (a) $3 + 2i \ ; \ i - 3 \ ; \ i \ ; \ 2 + i\sqrt{2}$.
   (b) $\frac{4-2i}{5}$.
   (c) $0.5 - \frac{i}{3}$.
7. *Resolva a equação* $(2 + 3i)X + i = 3i - 5$.

1.7 Geometria e álgebra dos números complexos.

1.8 Derivada complexa

Nesta lista vamos explorar a derivação de funções complexas *no sentido complexo*. Vamos acelerar o processo usando uma formulação diferente do conceito de derivada: *uma função é derivável se possuir por tangente uma função linear*. No cálculo se inverte o sentido dizendo que se a função for derivável então ela tem uma reta tangente. Ao inverter estamos garantindo que a fórmula de Taylor de primeiro grau existe:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$$

em que $o(x - a)$ representa um erro.

Exercícios 4 *1.* **derivação complexa.** *Vamos estudar quando uma função complexa é derivável. Alguns dos exemplos abaixo são negativos, outros positivos, nos levando a uma conclusão.*

(a) Calcule $f(z) = f(x + iy) = (x + iy)^2$. Escreve f como uma função $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.

(b) Escreva a função f definida no item anterior, como função de $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, (é uma questãozinha idiota mesmo, como parece, mas ela tem um objetivo secreto).

(c) Escreva a matriz Jacobiana de f, vista como função $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.

(d) Considere a função $g(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$; $\mathbf{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbf{R}^2$ e escreva a matriz jacobiana $J(g)$.

(e) Considerando as equações de Cauchy-Riemann, (lista anterior), qual a diferença entre as funções f, g?

Definição 1 *Funções complexas deriváveis, (complexamente).*

Considere uma função $\mathbf{C} \xrightarrow{f} \mathbf{C}$; $f = u+iv$. Dizemos que f é diferencialvel se as equações de Cauchy-Riemann forem válidas para sua derivada real:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ou ainda,

$$J(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.10}$$

2. **cálculo da derivada.**

(a) Calcule a matriz jacobiana de cada uma das funções abaixo e decida quais delas tem **derivada complexa**.

i. $f(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2 - y^3)$

ii. $g(x, y) = (x^3 + 3xy^2, 3x^2 - y^3)$

iii. $h_1(x, y) = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4, 4x^3y - 4xy^3)$

iv. $h_2(x, y) = (x^4 - 5x^2y^2 + y^4, 4x^3y - 4xy^3)$

v. $h_3(x, y) = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4, 4x^3y + 4xy^3)$

vi. $j(x, y) = (x, y)$

vii. $j_2(x, y) = (x, -y)$

(b) Verifique que $f(z) = \frac{1}{z}$ pode escrever-se como

$$f(x, y) \; ; \; \mathbf{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbf{R}^2.$$

i. Verifique que sua jacobiana satisfaz às equações de Cauchy-Riemann.

ii. Escreva o número complexo que equivale a $J(f)$ como função linear, (lista anterior),

iii. e identifique uma relação simples entre f e $J(f)$ bem conhecida do cálculo.

(c) Repita a questão anterior com cada um das funções diferenciáveis da (questao, 2a)

(d) Repita a questão anterior para $f(z) = \frac{z+3}{z+5}$ ressaltando a região do plano complexo na qual as operações forem válidas.

3. **equações de Cauchy-Riemann.**

(a) Considere uma função complexa $f = u+iv$. Considere para a função complexa f a definição $\partial f = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(f)$. Calcule ∂f escrevendo $f = u + iv$, e simplifique sob a hipótese de que f é derivável. Se $\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$. Mostre que f satisfaz às equações de Cauchy-Riemann se, e somente se, $\overline{\partial}(f) = 0$.

(b) Escreva a fórmula de Green para u ; $\mathbf{R}^2 \xrightarrow{u} \mathbf{R}$ e para v ; $\mathbf{R}^2 \xrightarrow{v} \mathbf{R}$. Prove que $\oint_{\partial\Omega} udx+vdy = 0$ em que $\partial\Omega$ é a fronteira de uma região Ω limitada do plano complexo qualquer, *tal que $\partial\Omega$ tem comprimento finito.*

(c) Aplique o teorema Fundamental do Cálculo para concluir que $f = (u, v)$ é integrável, (tem uma primitiva).

1.9

Como aplicação direta da fórmula de Green,

$$\oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \int_{\Omega}\int (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = 0$$

vamos provar nesta lista de exercícios a propriedade mais importante das `funções complexas com derivada complexa`: que elas são uma derivada. Isto é *se f for derivável complexamente, então f é uma diferencial exata*: existem duas funções reais U, V ; $F = U + iV$; $\mathcal{J}(F) = \partial(F) = f = u+iv$. O símbolo ∂ representa o operador diferencial parcial definido na lista anterior.
Ou ainda,

$$\oint_{\partial\Omega} udx - vdy = \int_{\Omega}\int (-v_x - u_y)dxdy = 0$$

para qualquer curva fechada $\partial\Omega$ que seja fronteira de uma região Ω, limitada.
Na linguagem da Física, se f for diferenciavel complexamente então ela é a derivada de um `potencial` complexo F.

1. Considere uma função complexa diferenciável[1], $f = u + iv$. Escreva a função complexa f' em termos das derivadas de u, v de todas as formas possíveis.

2. Aplique a `fórmula de Green` às coordenadas da função complexa diferenciável $f = u + iv$ verificando que f é uma diferencial exata, (logo tem primitiva). Justifique a denominação de `primitiva`.

3. Chame de $F = U + iV$ a primitiva da função complexa diferenciável $f = u + iv$. Expresse a derivada $\partial(F)$ em termos das componentes de f. Mostre que F é uma diferencial exata.

4. Considere a função complexa derivável $f = u + iv$. Escreva a jacobiana de $f = (u, v)$ e de $f' = \partial(f)$ para concluir que f' é também uma função complexa diferenciável.

5. Conclua que se f for uma função complexa diferenciável, então f é indefinidamente diferenciável, logo tem uma uma série de Taylor, (seria convergente em alguma região ?)

6. Considere a função complexa $f(z) = \frac{1}{z}$. Verifique que então que é preciso falar da derivação de f citando uma região conexa que não contenha zero em seu interior devido a expressão da fórmula de Green.

[1] de agora em diante usaremos apenas esta linguagem *função complexa diferenciável* em vez de acrescentar *derivada complexa*.

7. Escreva a fórmula de Taylor da função complexa diferenciável f na vizinhança do ponto $z = 0$ supondo a existê ncia de um raio de convergência. Mostre que se $f(0) = 0$ então $f(z)z_{|z=0}$ é a expressão da derivada de f. Como f é também diferenciável, escreva a fórmula de Taylor de f' e compare com $\frac{f(z)}{z}$.

8. Enuncie sob forma de teoremas os resultados desta lista e procure ver as expressões equivalentes dos seus enunciados em um livro de variável complexa.

Referências Bibliográficas

[1] Tom M Apostol

Calculus Blaisdell Publishing Company - 1962

ou um outro livro qualquer de Cálculo

[2] Thomas Williams, Colin Kelley and many others

Gnuplot: Um programa para fazer gráficos

http://www.gnuplot.info

Distribuido livremente.

[3] Lang, Serge *Estruturas Algébricas*

ou um outro livro qualquer de Álgebra

[4] Nachbin, Leopoldo -

Introdução à Álgebra

ou um outro livro qualquer de Álgebra

[5] Praciano-Pereira, Tarcisio e Rodrigues dos Santos, José Stálio

Introdução à Matemática Universitária

versão eletrônica

http://lmc.sobralmatematica.org/livros.html - 2005

[6] Schetchman, W. et alli

`Maxima` Um programa de computação algébrica

http://www.maxima.org

Distribuido sob `GPL`

[7] Praciano-Pereira, T *Cálculo Avançado* - Publicação Preliminar - Dep. de Matemática - Universidade Estadual Vale do Acaraú - Sobral - Ce - 2007

http://lmc.sobralmatematica.org/livros.html

[8] Praciano-Pereira, T e Medeiros, Juan Carlos O. *Variáveis Complexas* - Notas de aula - Publicação Preliminar - Lab de Matemática Computacional - Universidade Estadual Vale do Acaraú - Sobral - Ce - 2008

http://varcom.sobralmatematica.org/textos

[9] Grupo do Scilab no INRIA

`Scilab` Um programa para fazer Álgebra Linear computacionalmente - Cálculo Numérico

http://www.scilab.org

Distribuido sob `GPL`

[10] *A enciclopédia livre na Internet*

http://pt.wikepedia.org http://www.wikipedia.org